Filtraggio Iterativo Locale Adattivo
Un nuovo modo per scomporre ed analizzare segnali nonlineari e nonstazionari

Mirko Piersanti

INFN, Sezione di Roma "Tor Vergata"

in collaborazione con

Antonio Cicone - DISIM – Universitá dell'Aquila
Haomin Zhou - Georgia Institute of Technology

18 Dicembre 2017

Dato un segnale $s(t)$, $t \in \mathbb{R}$, quale il livello del mare misurato lontano dalla costa o la temperatura media della troposfera

Problema

Scomporre s in poche componenti significative senza avere a priori alcuna informazione su s.

I metodi tradizionali, come la Trasformata di Fourier o Wavelet, richiedono delle ipotesi sul segnale e non gestiscono bene segnali nonlineare e nonstazionari.

Idea

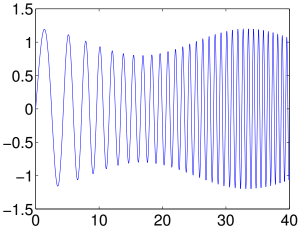
Sviluppare metodi nonlineari e che si adattano ai dati

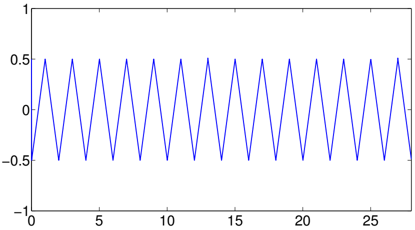
Cosa si intende per componenti significative?

Funzione modale intrinseca di Huang – IMF

E' una funzione tale che

1. Il numero dei suoi estremi e zeri é o uguale o differisce al piú di uno
2. Il valore medio tra l'inviluppo superiore ed inferiore é zero dappertutto





Come produrre tali IMF?

Ottimizzazione
- Rapresentazione tempo–frequenza sparsa
- Trasformata Sincrocompressa Wavelet
- Trasformata Empirica Wavelet
- ...

Svantaggi: bisogna selezionare a priori una base

Iterazione
- EMD
- Ensemble EMD
- Filtraggio Iterativo – IF
- ...

Problemi aperti: convergenza e stabilitá per EMD ed EEMD.
convergenza e stabilitá per IF dimostrata *a-priori*.

Svantaggi: non completamente adattivi e locali

Stabilitá?

L'operatore $\mathcal{M}$, basato su spline cubiche ed usato ripetutamente nelle iterazioni $\Rightarrow$ una piccola perturbazione del segnale puó provocare drastiche differenze nella scomposizione

Parzialmente risolto con l'Ensemble EMD (EEMD)
Ciascuna IMF é data dalla media tra molte curve. Ogniuna prodotta aggiungendo una perturbazione artificiale casuale al segnale originale

Convergenza?

La convergenza degli algoritmi EMD/EEMD non é mai stato dimostrata

Dimensioni superiori?

Non é chiaro come si possa estendere questa tecnica a dimensioni superiori

Filtraggio Iterativo

Idea principale

Stessa struttura dell'algoritmo EMD con l'operatore di media locale $\mathcal{M}$ basato ora sulla convoluzione

$$\mathcal{M}(s)(x) = (s * w)(x) = \int_{-L}^{L} s(x+t)w(t)\mathrm{d}t$$

dove il *filtro/maschera* $w(t)$ é:

- pari
- nonnegativo
- zero al di fuori di $[-L, L]$
- $\int_{-L}^{L} w(t)\mathrm{d}t = 1$

$2L$ é detta *lunghezza* del filtro/maschera

La prima IMF prodotta dal ciclo interno di IF é

$$I_1(x) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}_1\left(s_n\right)(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) - \mathcal{M}_1\left(s_n\right)(x)$$

Le IMF successive ottenute tramite IF sono

$$I_k(x) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}_k(r_n)(x) = \lim_{n\to\infty} r_n(x) - \mathcal{M}_k\left(r_n\right)(x) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}_k^{n-1}(r)(x)$$

con $r(x) = s(x) - I_1(x) - \ldots - I_{k-1}(x)$.

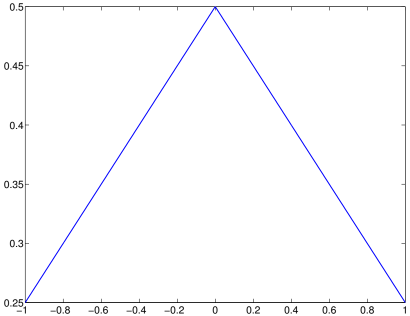
Il metodo si interrompe quando $r(x)$ diventa monotona

OSS: Fissiamo $\mathcal{M}$ per tutto il ciclo interno

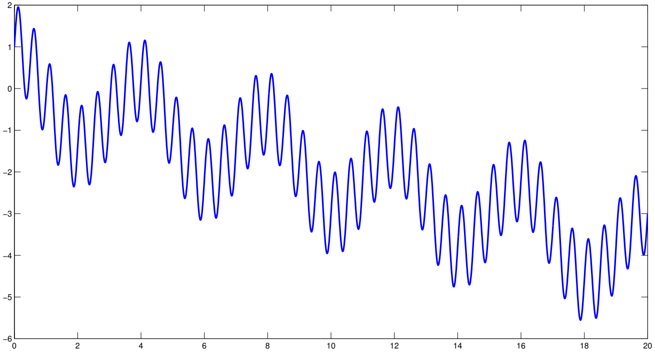
Esempio di filtro

Filtro a doppia media

$$w(t) = \frac{L + 1 - |t|}{(L+1)^2}, \quad t \in [-L,\, L]$$

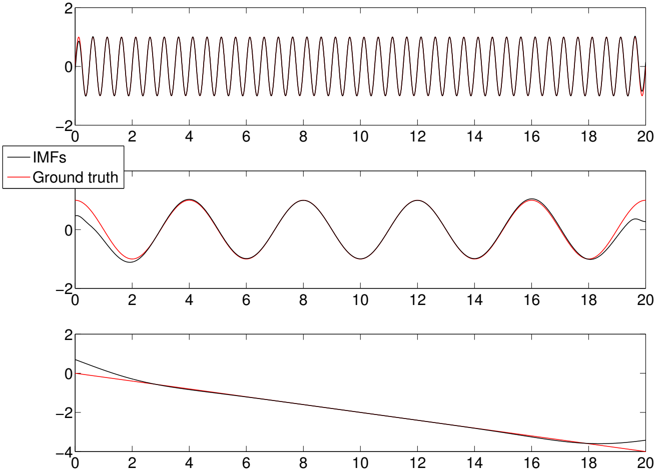


Esempio 1

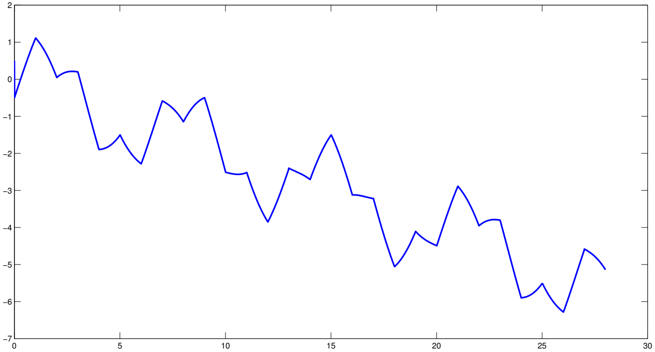


Segnale

Esempio 1

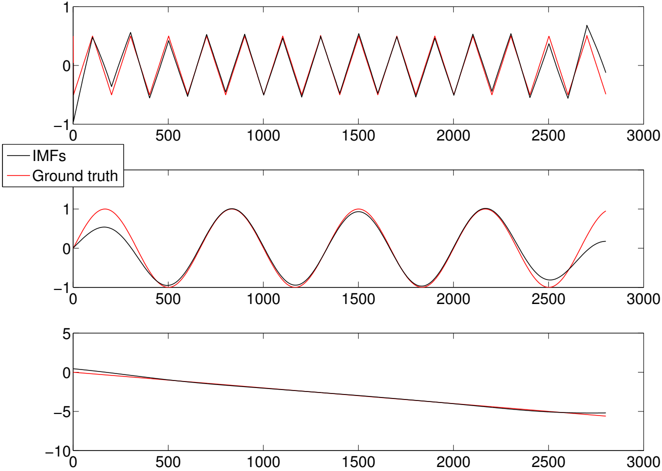


Esempio 2

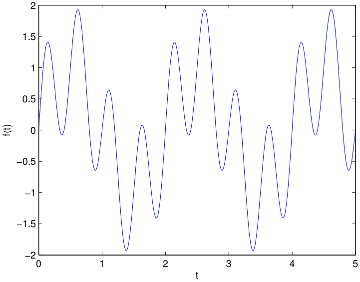


Segnale

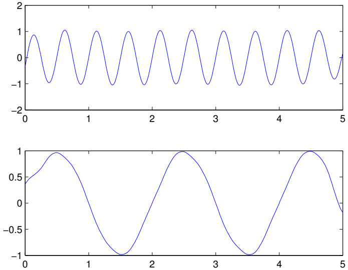
Esempio 2



Esempio 3

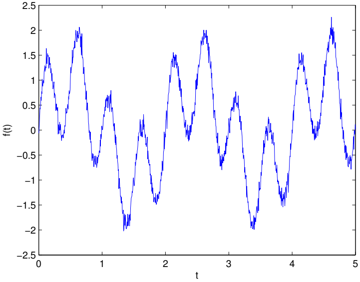


Segnale

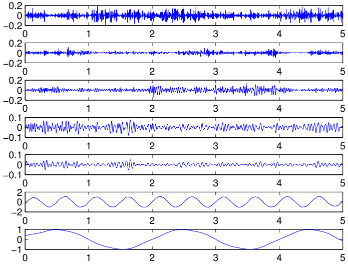


IMF

Esempio 3

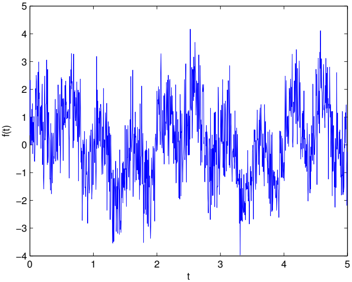


Segnale con rumore

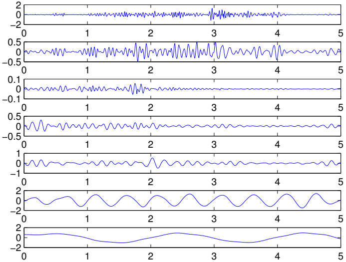


IMF

Esempio 3

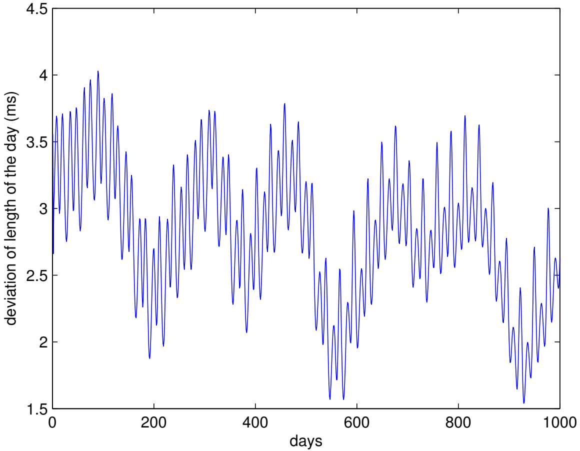


Segnale con piï¿½ rumore

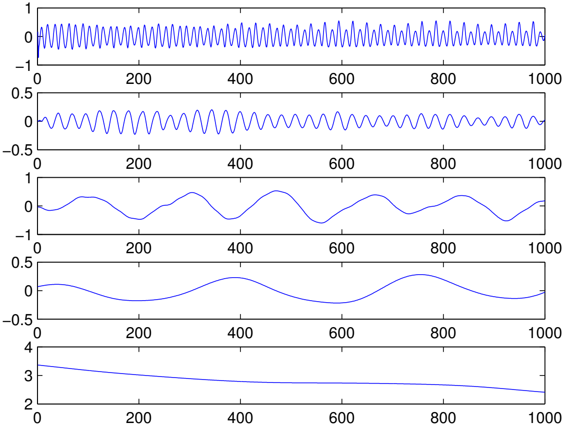


IMF

Esempio 4 – Lunghezza del giorno

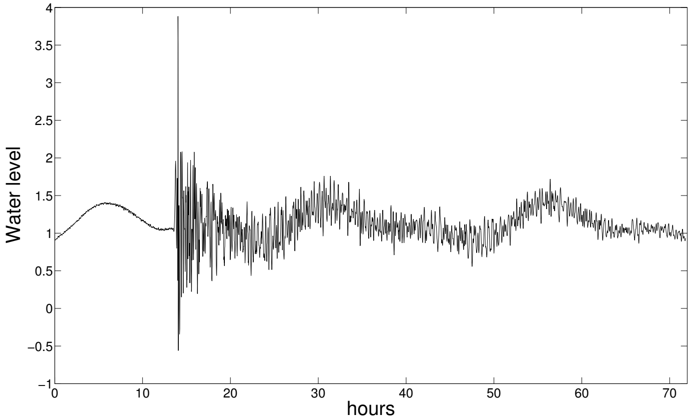


Esempio 4 – Lunghezza del giorno

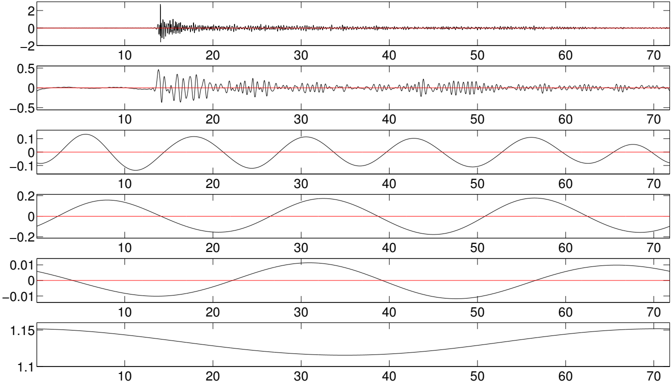


IMFs

Esempio 5 – Tsunami

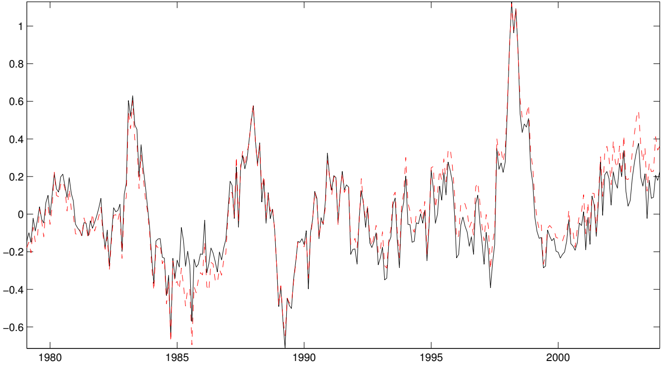


Esempio 5 – Tsunami

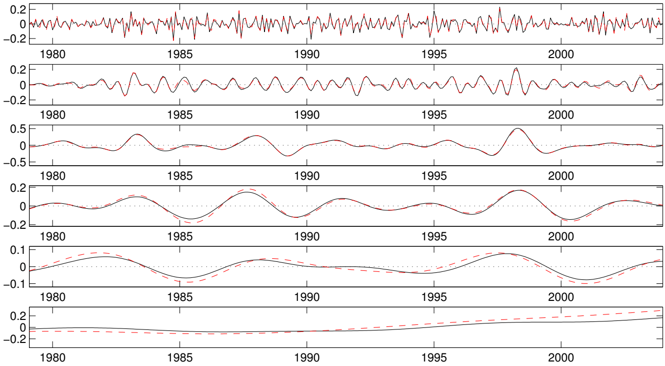


IMF

Esempio 6 – Temperatura medie mensile della Troposfera

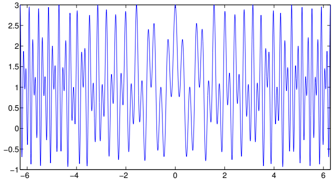


Esempio 6 – Temperatura medie mensile della Troposfera

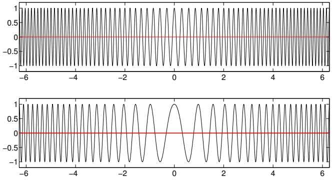


IMFs

Esempio 7

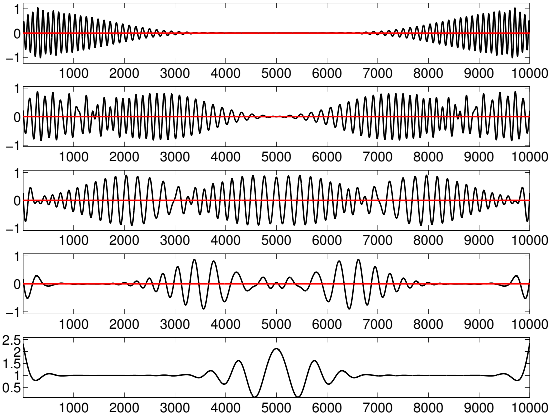


Segnale



Componenti originali

Esempio 7



IMF

Problema

Il Filtraggio Iterativo non riesce a gestire correttamente segnali le cui componenti presentano una sostanziale variazione della frequenza nel tempo

Idea

Generalizzare il metodo del Filtraggio Iterativo ad ottenere una tecnica completamente adattiva e locale

Filtraggio Iterativo Locale Adattivo

Idea Principale

Consentire alla lunghezza $2L$ del filtro w di cambiare in modo continuo rispetto alla posizione x

L'operatore $\mathcal{M}$, che misura la media mobile di s, é dato da

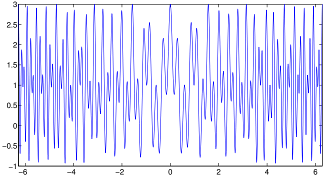
$$\mathcal{M}_{w,L}(s)(x) = \int_{-L(x)}^{L(x)} s(x+t)w(x,t)\mathrm{d}t$$

cone $w(x,t)$ filtro di lunghezza $2L(x)$

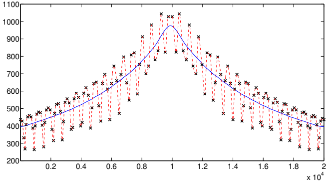
Perció $\qquad s_{n+1}(x) = \mathcal{F}_n(s_n)(x) = s_n(x) - \mathcal{M}_{w,L}(s_n)(x)$

dove $\mathcal{F}_n$ é l'operatore che cattura la parte oscillatoria di s_n al passo n del ciclo interno

Esempio 1

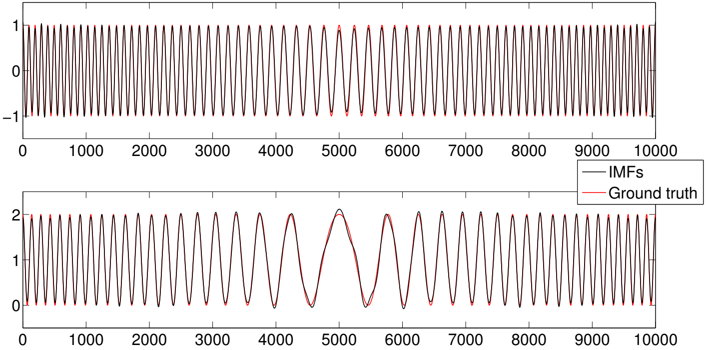


Segnale

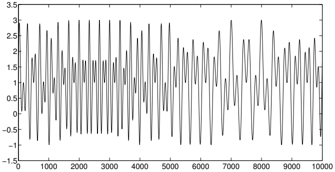


Lunghezza del filtro

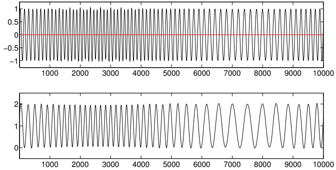
Esempio 1


1
0
−1
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000
8000
9000
10000
IMFs
Ground truth
2
1
0
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000
8000
9000
10000

Esempio 2 – senza rumore

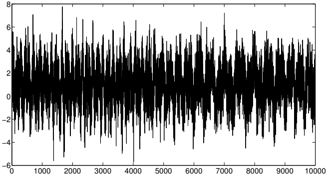


Segnale

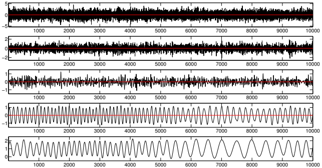


IMF

Esempio 2 – rumore con SNR 0 dB

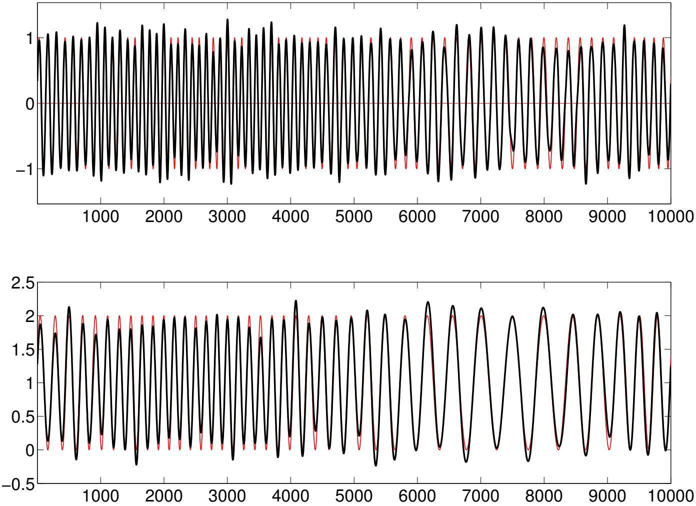


Segnale con livello di rumore di 0 dB

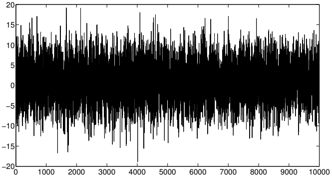


IMF

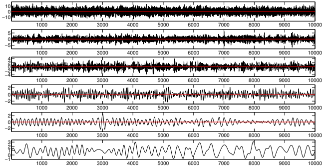
Esempio 2 – rumore con SNR 0 dB



Esempio 2 – rumore con SNR -10 dB



Segnale con livello di rumore di -10 dB



IMF

Esempio 2 – rumore con SNR -10 dB